

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY VOJENSKÝCH KONFLIKTŮ

MATHEMATICAL MODELS OF MILITARY CONFLICTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Martin Skopal

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Martin Skopal
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modely vojenských konfliktů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematické modelování vojenských konfliktů pomocí diferenciálních rovnic patří mezi zajímavé aplikace této vědní oblasti. Vychází z tzv. Richardsonovy teorie konfliktu a Lanchesterových modelů boje, reprezentovaných soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.

Cíle bakalářské práce:

1. Sestavení základních matematických modelů vojenských konfliktů.
2. Popis významných kvalitativních vlastností jejich řešení se zaměřením na stabilitu.
3. Diskuse velikosti parametrů vybraných modelů, interpretace získaných výsledků a jejich porovnání s reálnými údaji.

Seznam doporučené literatury:

BRAUN, Martin. Differential Equations and their applications: An introduction to Applied Mathematics. 4. ed. New York: Springer-Verlag, 1992. ISBN 0-387-97894-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce pojednává o matematických modelech využívajících se v teorii vojenství. Cílem je sestavení a popis Richardsonova modelu konfliktu a vybraných Lanchesterových modelů boje. Následně je provedena jejich analýza se zaměřením na stabilitu. Součástí práce je také aplikace skutečných dat na modely a následné zhodnocení jejich výsledků.

Summary

This thesis discusses the mathematical models used in the theory of warfare. The aim is to build and describe the Richardson model of conflict and selected Lanchester models of combat. The models are subsequently analysed with a focus on stability. A part of the thesis is also formed by application of real data onto the models and by the subsequent evaluation of their results.

Klíčová slova

Lanchesterovy modely boje, Richardsonův model, stabilita rovnovážných bodů, lineari-
zace, diferenciální rovnice, autonomní systémy

Keywords

Lanchesters models of combat, Richardson model, stability of equilibrium points, lineari-
zation, differential equations, autonomous systems

SKOPAL, M. *Matematické modelování vojenských konfliktů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 31 s. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematické modely vojenských konfliktů* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Martin Skopal

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení mé práce a za jeho ochotu a cenné rady

Martin Skopal

Obsah

1	Úvod	2
2	Matematický aparát	3
2.1	Autonomní systémy	3
2.2	Stabilita rovnovážných bodů	4
2.3	Typy rovnovážných bodů v rovině	5
3	Richardsonova teorie konfliktu	6
3.1	Sestavení modelu	6
3.2	Stabilita systému	6
3.3	Diskuze parametrů	7
3.4	Zbrojení před 1. světovou válkou	8
3.4.1	Hodnocení	10
4	Lanchesterovy modely boje	12
4.1	Model konvenčního boje	12
4.1.1	Sestavení modelu	12
4.1.2	Stabilita systému	13
4.1.3	Řešení rovnic	14
4.1.4	Vyjádření charakteristik průběhu boje	15
4.2	Model smíšeného konvenčního a partyzánského boje	16
4.2.1	Sestavení modelu	16
4.2.2	Stabilita rovnovážných stavů	17
4.2.3	Řešení soustavy	18
4.2.4	Vyjádření charakteristik průběhu boje	21
4.3	Diskuze parametrů	22
4.4	Bitva v Ardenách	23
4.4.1	Historická data	23
4.4.2	Použitý model	23
4.4.3	Porovnání skutečných hodnot s predikovanými	24
4.4.4	Hodnocení	25
5	Závěr	26
6	Seznam příloh	29
7	Přílohy	30

1. Úvod

Snaha lidí modelovat a předpovídat události pomocí matematických nástrojů je rozšířena napříč různými obory od biologie, mechaniky až po ekonomii. Stejně tak je tomu i ve vojenství, kde tuto problematiku řeší především Lanchesterovy modely boje a Richardsonův model.

První z nich, tedy model Lanchesterův, se zabývá soubojem dvou homogenních vojsk a byl poprvé formulován Frederickem Lanchesterem v roce 1916. Skládá se obecně ze soustavy dvou diferenciálních rovnic. Na základě toho, o jaký typ konfliktu (konvenční, partyzánský) se jedná, je daná soustava patřičně modifikována. Pomocí modelů jsme schopni jednak předpovědět, které vojsko zvítězí, v jakém čase se tak stane a kolik vojenských prostředků zůstane vítězné straně po ukončení bojů.

Problematikou vztahů mezi zeměmi se zabývá Richardsonova teorie konfliktu. Zkoumá vzájemnou závislost válečných potenciálů dvou zemí či aliancí, jež se cítí být navzájem ohrožovány a jsou připraveny se proti veškerým útokům druhé strany bránit. Jedná se o soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic, kterými se snažíme tuto závislost popsat. Richardsonovou snahou bylo určit podmínky, při nichž by bylo možné dosáhnout mezi zeměmi trvalého míru.

Tato práce se zabývá sestavením výše popsaných modelů a kvalitativní analýzou jejich řešení, přičemž se znalosti z ní získané se použijí při aplikaci na reálná data. Strukturována následovně.

Nejprve je uveden souhrn použitého matematického aparátu, jež se v práci používá. Týká se především otázek stability rovnovážných bodů nelineárních systémů a lineárních systémů, kde tato problematika splývá se stabilitou systému.

V další kapitole sestavíme Richardsonův model, zmíníme se o jeho různých variantách a jejich interpretaci v reálném světě. Provedeme jeho analýzu se zaměřením na stabilitu rovnovážného stavu systému. Poté aplikujeme model na data válečného zbrojení před 1. světovou válkou, jež při analýze používal Richardson, která jsou uvedena v publikaci [1] a zhodnotíme platnost jeho závěrů z nich vyvozených.

Práce se v další kapitole věnuje dvěma typům Lanchesterova modelu, a to modelu konvenčnímu a smíšenému. U těchto modelů je provedena jejich analýza se zaměřením na stabilitu rovnovážných bodů společně s určením hlavních charakteristik obou modelů. V praktické části se pokusíme aplikovat získané znalosti z konvenčního modelu na reálná data z Bitvy v Ardenách z publikace [5]. Postup a výsledky poté okomentujeme.

V závěrečné kapitole shrneme dosažené výsledky práce, na základě nichž se pokusíme zhodnotit význam obou modelů a jejich dopad na vojenskou teorii.

2. Matematický aparát

Nejdříve si v této kapitole zavedeme pojmy a vlastnosti, které při sestavování našich modelů a práci s nimi využijeme. Nezavádíme však některé základy z teorie o diferenciálních rovnicích, ale zaměříme se spíše na látku, jež běžně není součástí učiva matematiky na technických školách. Použité pojmy lze nalézt v [1][2][6][7].

2.1. Autonomní systémy

Definice 2.1.1. Rovnici nebo soustavu rovnic nazveme autonomní, jestliže rovnice nebo soustava nezávisí na nezávislé proměnné. Autonomní soustavu rovnic prvního řádu tak můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (2.1)$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, je spojitá a definována na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Řešení této rovnice nazýváme funkci \mathbf{z} derivovatelnou na nějakém intervalu I , která po dosazení na I této rovnici (2.1) vyhovuje. Obvykle hledáme řešení definované na nejširším vhodném intervalu I , takové řešení nazýváme maximální.

Poznámka 2.1.1. Rovnici (2.1) lze chápat jako tzv. spojitý dynamický systém. Dynamický systém, volně řečeno, je způsob, jak lze v určitém časovém úseku popsat všechny body daného prostoru. Prostorem se myslí například stavový prostor nějakého fyzikálního systému (stavové veličiny charakterizující stav daného systému jsou např. teplota, tlak či objem). V mechanice může tímto prostorem být množina všech možných poloh a rychlostí systému. Stav, ve kterém se dynamický systém nachází, můžeme popsat konečnou množinou stavových veličin (proměnných). Vývoj systému v čase je zcela určen jeho okamžitým stavem.

Definice 2.1.2. Rovnici

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

nazveme lineární autonomní soustavu rovnic obsahující matici konstantních koeficientů $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i konstantní vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ na pravé straně, který představuje nehomogenní člen této soustavy.

Poznámka 2.1.2. V aplikacích obvykle nezávislou proměnnou t je čas. Pojem autonomní (systém) je proto přirozený – jde o jevy, při kterých se s časem t nemění podmínky jevu, které tvoří data úlohy.

Definice 2.1.3. Úloha určit řešení rovnice (2.1) vyhovující počáteční podmínce

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$$

se nazývá počáteční problém (Cauchyova úloha)

Definice 2.1.4. Graf řešení je množina bodů $\{[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)], t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice 2.1.5. Trajektorie řešení je množina bodů $\{[z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)], t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$:

2.2. STABILITA ROVNOVÁŽNÝCH BODŮ

Poznámka 2.1.3. Trajektorie je tedy průmět řešení $\mathbf{z}(t)$ do prostoru hodnot řešení, který nazýváme fázový prostor. Pohyb po trajektorii ve smyslu rostoucího času, znázorňujeme šipkou.

Definice 2.1.6. Rozlišujeme 3 typy trajektorií:

1. Singulární bod - trajektorie konstantního řešení.
2. Neprotínající se křivka.
3. Uzavřená neprotínající se křivka (cyklus) - trajektorie periodického řešení.

2.2. Stabilita rovnovážných bodů

Definice 2.2.1. Rovnovážným bodem rozumíme řešení \mathbf{z}^* soustavy (2.1) takové, že splňuje rovnici $\mathbf{f}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$.

Řekneme, že rovnovážný bod \mathbf{z}^* je stabilní jestliže $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, tak že

$$|\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{z}^*| < \delta \Rightarrow |\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^*| < \varepsilon, \quad t \geq t_0,$$

kde symbol $|\cdot|$ představuje libovolnou normu v \mathbb{R}^n (například euklidovskou). Řekneme že rovnovážný bod \mathbf{z}^* je asymptoticky stabilní (atraktivní) je-li stabilní a navíc

$$|\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{z}^*| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^*| = 0,$$

kde t_0 je časový okamžik v němž je předepsána počáteční podmínka $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$. Není-li rovnovážný bod stabilní, nazveme ho nestabilním.

Poznámka 2.2.1. Pro praktické určení stability rovnovážného bodu \mathbf{z}^* řešíme tzv. charakteristickou rovnici

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (2.3)$$

určující vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, kde \mathbf{I} je jednotková matice a \mathbf{J} je tzv. Jacobiho matice daná vztahem

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{z}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(\mathbf{z}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(\mathbf{z}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(\mathbf{z}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(\mathbf{z}^*) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$:

Poznámka 2.2.2. U lineární soustavy pojem Jacobiho matice \mathbf{J} splývá s pojmem matice soustavy \mathbf{A} .

Poznámka 2.2.3. Poznamenejme ještě, že v lineárním případě mluvíme přímo o stabilitě/atraktivitě/nestabilitě soustavy, neboť ze stability rovnovážného stavu vyplývá stabilita všech dalších řešení (Pojem stability řešení se zavádí obdobně jako pojem stability rovnovážného bodu).

Dodejme navíc, že v lineárním případě nezávisí otázka stability/atraktivity/nestability na tvaru homogenního členu.

Věta 2.2.1. Pro rovnovážný bod \mathbf{z}^* soustavy (2.2) platí, že je:

1. asymptoticky stabilním, když všechna vlastní čísla příslušné Jacobiho matice mají zápornou reálnou část.
2. nestabilním, když má alespoň jedno vlastní číslo příslušné Jacobiho matice kladnou reálnou část.

Poznámka 2.2.4. Má-li alespoň jedno vlastní číslo nulovou reálnou část a žádné s kladnou reálnou částí, nelze o stabilitě rovnovážného bodu nelze na základě tohoto kritéria rozhodnout. V takovém případě se jedná o tzv. nehyperbolický bod.

Poznámka 2.2.5. Věta 2.2.1 je důsledkem tzv. linearizační věty. Vychází z následující úvahy: Máme nelineární systém (2.1) a nějaký rovnovážný bod \mathbf{z}^* . Při značení $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \mathbf{z}^*$ můžeme psát

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = f(\mathbf{w} + \mathbf{z}^*) = f(\mathbf{z}^*) + \nabla f(\mathbf{z}^*)\mathbf{w} + r(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w} + r(\mathbf{w}),$$

kde $r(\mathbf{w}) = o(|\mathbf{w}|)$ pro $\mathbf{w} \rightarrow 0$. Na okolí bodu \mathbf{z}^* se jedná o lineární problém s maticí soustavy $\mathbf{A} = \nabla f(\mathbf{z}^*)$ a malou poruchou r . Tento lineární systém nazýváme linearizovaným systémem.

Linearizační věta pak říká, že fázový portrét linearizovaného systému je kvalitativně ekvivalentní s lokálním fázovým portrétem v libovolném okolí daného rovnovážného bodu nelineárního systému.

2.3. Typy rovnovážných bodů v rovině

Protože námi uvažované systémy jsou planární, připomeneme ještě základní klasifikaci rovnovážných bodů na základě jejich příslušných vlastních čísel.

Uvažujme soustavu lineárních rovnic (2.2) v \mathbb{R}^2 a odpovídající její charakteristickou rovnici (2.3) s kořeny λ_1, λ_2 , které jsou vlastními čísly odpovídajících rovnovážných bodů. Tyto rovnovážné body představují:

- (a) Přitažlivý uzel - pokud oba kořeny jsou reálné a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$.
- (b) Odpuzující uzel - pokud oba kořeny jsou reálné a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.
- (c) Přitahující ohnisko - Pokud kořeny jsou komplexně sdružené se zápornou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ ($\mu < 0, \nu \neq 0$).
- (d) Odpuzující ohnisko - Pokud kořeny jsou komplexně sdružené s kladnou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ ($\mu > 0, \nu \neq 0$).
- (e) Sedlo - Pokud oba kořeny jsou reálné, jeden kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
- (f) Střed - Pokud kořeny jsou komplexně sdružené s nulovou reálnou částí, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$.

3. Richardsonova teorie konfliktu

V této kapitole vycházíme z práce Lewis Fry Richardsona. Jeho snahou bylo najít model, popisující vzájemnou závislost vztahů dvou zemí, kde každá z nich se cítí být druhou stranou ohrožena a je odhodlána se eventuálním útokům bránit. Richardson tvrdil, že je možné odvodit takový deterministický model, jež by tyto vztahy za předpokladu, že jsou ponechány pouze napospas nekontrolovatelným instinktům jednotlivých aktérů bez jakéhokoli úsilí situaci kontrolovat, popisoval a díky němuž by byl schopen vyjádřit podmínky pro nastolení trvalého míru mezi oběma zeměmi.

3.1. Sestavení modelu

Označme $x(t)$ válečný potenciál či stav zbrojení (armaments) první země a $y(t)$ válečný potenciál země druhé. Míra změny $x(t)$ jistě závisí na válečné připravenosti $y(t)$ a na nesnášenlivosti, jež první země chová ke druhé. Tyto závislosti jsou reprezentovány výrazy $ay(t)$ a g , kde a a g jsou kladné konstanty, jež přispívají k růstu $x(t)$. Na druhou stranu má cena zbrojení omezující účinek na $x(t)$ a reprezentujeme ji výrazem $-cx(t)$, můžeme jej také chápat jako rostoucí náklady za udržení válečného potenciálu. Podobně pro $y(t)$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= ay(t) - cx(t) + g, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= bx(t) - ey(t) + h,\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde $a, b, c, e, g, h > 0$

Je vidět, že se jedná o nehomogenní lineární systém dvou diferenciálních rovnic. Naším záměrem je zkoumat řešení pro něž jsou válečné potenciály nulové, hledáme tedy rovnovážná řešení kdy se obě rovnice soustavy (3.1) rovnají nule, tedy nedochází k žádnému dalšímu navyšování válečného potenciálu, což můžeme interpretovat jako mírový stav. Chceme-li zjistit zda je takový stav udržitelný, je třeba se zabývat otázkou jeho stability.

3.2. Stabilita systému

Je dobré se nejprve zamyslet, zda nelze soustavu (3.1) nejprve nějak smysluplně zjednodušit a jaké by takové změny měly implikace.

Předpokládejme tedy, že g a h položíme rovny nule. Pak jistě $x^* = 0$ a $y^* = 0$ je rovnovážným stavem takového systému. Pokud navíc platí, že země se vzájemně neohrožovaly a tudíž proti sobě nezbrojily (tj. $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$), můžeme říci, že takový stav je stabilní a tedy mírový. Nazýváme jej oboustranným odzbrojením bez nesnášenlivosti (peace by disarmament and satisfaction).

Zároveň si můžeme povšimnout, že stav oboustranného odzbrojení za oboustranné (či jednostranné) nesnášenlivosti, tedy stav kdy konstanty g a h (resp. jedna z nich) jsou nenulové, mírovým není a země začnou zbrojit.

Podobně jednostranné odzbrojení také dle našeho modelu stabilní není a tedy nutně vede k válce, což je v souladu s příkladem Německa po Versaillské smlouvě a s jeho následným zbrojením před 2. světovou válkou.

Vraťme se nyní k našemu obecnému systému (3.1). Nejdříve hledejme rovnovážný bod soustavy. Platí

$$\begin{aligned} ay^* - cx^* + g &= 0, \\ bx^* - ey^* + h &= 0, \end{aligned}$$

čímž dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejich vyjádřením dostáváme vztah pro

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{eg + ah}{ce - ab}, \\ y^* &= \frac{ch + bg}{ce - ab}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

což jsou souřadnice našeho hledaného rovnovážného bodu za podmínky, že $ce - ab \neq 0$. Pokud by tato podmínka neplatila tak bychom mohli dostat až nekonečně mnoho rovnovážných bodů.

Nyní nás tedy zajímá zda je rovnovážný bod (3.2) také stabilní a jestli ano, tak za jakých podmínek.

Určeme si tedy vlastní čísla soustavy (3.1) z charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + (c + e)\lambda + ce - ab = 0,$$

kde \mathbf{J} je Jacobiho matice (pro kterou v tomto případě platí, že je rovna matici soustavy \mathbf{A} - viz Matematický aparát - Poznámka 2.2.3) ve tvaru

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -c & a \\ b & -e \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla mají tedy tvar:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c + e) \pm \sqrt{(c - e)^2 + 4ab}}{2}.$$

Všimneme si, že oba kořeny jsou nenulové a navíc jsou oba záporné je-li $ce > ab$ a jeden kořen je kladný když $ce < ab$. Tudíž dostáváme, že rovnovážný bod je stabilní platí-li $ce > ab$ a nestabilní platí-li $ce < ab$.

Z linearity soustavy vyplývá, že tento závěr je možno získat i z analýzy stability nulového rovnovážného bodu, homogenního systému (3.1) (kde klademe $g = h = 0$) (viz Matematický aparát - Poznámka 2.2.3).

3.3. Diskuze parametrů

Matematický model, jež jsme zde popsali obsahuje šest volných parametrů a tak dlouho dokud zůstanou volné, nemůžeme o něm mluvit jako o příliš silném modelu. Proto, abychom dali této teorii smysl, je nutné hledat takové parametry jež odpovídají skutečnosti z hlediska obsahu naší teorie a ukázat tak, že se nejedná pouze o konstanty odpovídající našim datům, ale o měřitelné prvky, či alespoň o užitečný teoretický konstrukt.

3.4. ZBROJENÍ PŘED 1. SVĚTOVOU VÁLKOU

Konstanty g a h reprezentující nesnášenlivosti daných zemí je velmi náročné nějakým způsobem naměřit. Je problém proměnné, které tyto konstanty určují, vůbec pojmenovat, natož kvantifikovat. Proto se tyto parametry obvykle zanedbávají.

Pro ostatní konstanty jsme však schopni získat smysluplné odhady. Jedním ze způsobů jak určit c, e je chápat tyto konstanty jako reciproké hodnoty času. Tedy c^{-1} a e^{-1} můžeme popsat jako relaxační časy, což obecně je doba, za kterou klesne intenzita daného jevu (v našem případě $x(t), y(t)$) na $1/e$ (tučným výrazem e značíme eulerovo číslo v této kapitole) násobek maximální hodnoty, tedy pro $y \equiv 0$ a $g \equiv 0$ máme:

$$x(t) = e^{-c(t-t_0)}x(t_0),$$

což implikuje že

$$x(t_0 - c^{-1}) = \frac{x(t_0)}{e},$$

tedy v našem případě je c^{-1} čas potřebný k tomu, aby byl válečný potenciál $x(t)$ snížen v poměru jedna ku 2,718 za podmínky, že tato země nemá žádnou nesnášenlivost ($g \equiv 0$) a válečný potenciál druhé země je nulový.

Richardson odhaduje c^{-1} jako dobu působení parlamentu dané země. Je-li tedy parlament volen na pět let pak platí $c = 0.2$.

Pro určení konstant a, b vyjdeme z hypotetického příkladu, kde $g = 0$ a $y(t_1) = y_1$ platí tedy

$$\frac{dx}{dt} = ky_1 - ax.$$

Je-li navíc $x=0$ pak

$$\frac{1}{k} = \frac{y_1}{\frac{dx}{dt}},$$

což můžeme interpretovat tak, že k^{-1} je čas potřebný k tomu aby se válečný potenciál $x(t)$ dostal na stejnou hodnotu jako válečný potenciál země y v čase t_1 $y(t_1)$ za podmínky, že ten zůstává konstantní v čase, mezi zeměmi není žádná nesnášenlivost a náklady na zvyšující se válečný potenciál nebrzdí jeho růst.

Jako ilustrační příklad je možno použít případ Německa mezi lety 1933-1936. Německo se za tuto dobu dotáhlo se svým válečným potenciálem na své sousedy téměř z nuly. Uvažujeme-li, v zájmu názornosti, že zpomalovací efekt $cx(t)$ téměř vyvážil velmi silnou nesnášenlivost Německa g , pak klademe $a = 0.3$ pro Německo.

Richardson také vypočítával, že hodnota konstanty k je proporční k průmyslové kapacitě daného státu.

3.4. Zbrojení před 1. světovou válkou

Nyní se pokusíme podrobit náš model zkoušce na reálných datech zbrojení evropských zemí před první světovou válkou. Zaměříme se na země Ruska a Francie, jež tvoří stranu dohody a Německa s Rakousko-Uherskem, jež nazveme Centrální mocnosti. Pro naši analýzu použijeme data s nimiž při své práci pracoval také Richardson.

Za prvé je třeba zavést hodnoty konstant a, b, c, e . Richardsonova úvaha spočívala v předpokladu, že je možné obě aliance považovat, v rámci jejich průmyslových kapacit, za stejně velké a třikrát větší jak Německo, dostáváme tedy $a = b = 0.9$, a zároveň předpokládáme že $c = e = 0.2$.

3. RICHARDSONOVA TEORIE KONFLIKTU

Na základě těchto poznatků přepíšme rovnice (3.1) na tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= ay(t) - cx(t) + g, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= ax(t) - cy(t) + h.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Tento systém má svůj rovnovážný bod

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{cg + ah}{c^2 - a^2}, \\ y_0 &= \frac{ch + ag}{c^2 - a^2},\end{aligned}\tag{3.4}$$

Podíváme-li se navíc na podmínku stability

$$ce - ab = c^2 - a^2 = 0.04 - 0.81 = -0.77 < 0,$$

můžeme říci, že se jedná o nestabilní systém, což dle interpretace nestability znamená, že za těchto podmínek k válce nutně dojít musí, což je v souladu s historickými fakty, neboť k válce skutečně došlo.

Nyní se pokusíme zjistit zda-li náš model kopíruje reálná data. Než tak však učiníme, provedeme jistou úpravu našeho systému. Richardson se domníval, že systém (3.3) jak byl dosud uvažován, je příliš hrubým, neboť nebere v potaz možný vzájemný obchod mezi znesvářenými aliancemi. Proto označme $x = U - U_0$ a $y = V - V_0$ kde U, V jsou obranné rozpočty daných aliancí a U_0, V_0 je množství exportovaného zboží mezi aliancemi, tedy U_0 je množství zboží které aliance x vyexportuje do aliance y , podobně pro V_0 . Richardson předpokládal, že se hodnoty U_0 a V_0 v čase nemění. Nyní můžeme rovnice systému (3.3) sečíst dohromady

$$\frac{d}{dt}(x + y) = (a - c)(x + y) + g + h.\tag{3.5}$$

Dosazením za $x = U - U_0$ a $y = V - V_0$ dostáváme výraz pro

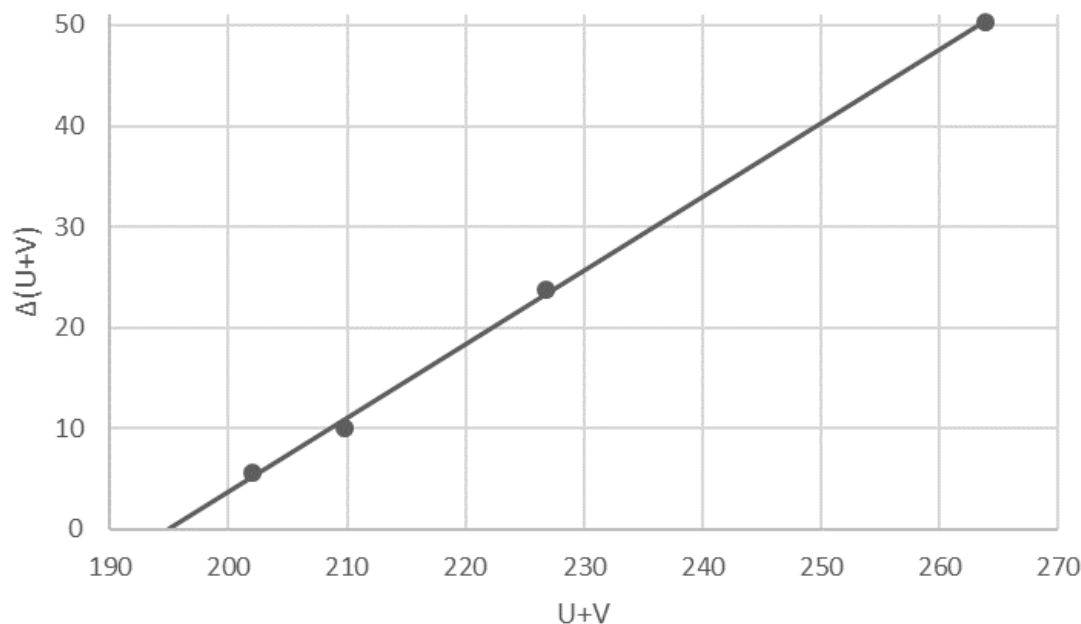
$$\frac{d}{dt}(U + V) = (a - c) \left[U + V - \left(U_0 + V_0 - \frac{g + h}{a - c} \right) \right].\tag{3.6}$$

Mějme data zadána tabulkou

	1909	1910	1911	1912	1913
Francie	48.6	50.9	57.1	63.2	74.7
Rusko	66.7	68.5	70.7	81.8	92
Německo	63.1	62	62.5	68.2	95.4
Rakousko-Uhersko	20.8	23.4	24.6	25.5	26.9
U+V	199.2	204.8	214.9	238.7	289
$\Delta(U + V)$		5.6	10.1	23.8	50.3
Průměrná hodnota $U + V$		202	209.8	226.8	263.8

Tabulka 3.1: Velikosti rozpočtů na obranu jednotlivých zemí

3.4. ZBROJENÍ PŘED 1. SVĚTOVOU VÁLKOU



Obrázek 3.1: Graf závislosti $\Delta(U + V)$ na $U + V$

Z grafu (Obrázek 3.1) je vidět, že hodnoty z naší tabulky téměř přesně kopírují přímku danou rovnicí

$$\Delta(U + V) = 0.73(U + V - 194), \quad (3.7)$$

z čehož můžeme mimo jiné vypožorovat, že předpokládané hodnoty pro $a = 0.9$ a $c = 0.2$ jsou až neuvěřitelně přesné. Navíc dle grafu víme, že je-li počáteční hodnota celkového vojenského rozpočtu větší jak 194 (v našem případě je to 199.2), pak dojde k jeho dalšímu růstu, neboť hodnota vzájemného obchodu toto množství nepokryje, což data dokazují. Mohli bychom tedy tvrdit, že je možné Richardsonovým modelem úspěšně předpovídat mezinárodní vztahy. Otázkou však zůstává, je-li tomu skutečně tak.

3.4.1. Hodnocení

Rovnice (3.5) přímo implikuje, že pokud se pokusíme vyjádřit míru růstu vojenských rozpočtů ku jejich výši v daném roce, dostaneme přímku a naše data toto skutečně ukazují. Nedá se však tvrdit, že by se jednalo o dostatečně průkazný důkaz toho že se reálné události skutečně řídí zákony danými naším modelem.

Vezměme v potaz už jen fakt, že vynášíme do grafu pouze čtyři body. Podotkněme, že vyneseme-li pouze dva body, je možné je vždy spojit přímkou, tedy pro dva body bychom vždy dostali přímku a náš model samotný by neměl žádný význam. V našem případě máme body čtyři, není však příliš nepravděpodobné, že tyto dva dodatečné body spadnou někde blízko oblasti, kde se již nachází přímka dána dvěma body předešlými. Naskýtá se nám tedy otázka proč nepoužít více bodů, tedy zahrnout více let do doby předválečného zbrojení.

Řešíme tedy problém od kdy se dané země připravují na válku, nebo považují postup druhé strany za agresivní a adekvátně na něj reagují, což je možná interpretace podmínky modelu, tedy chování dvou národů jež jsou odhodláni bránit se možnému útoku. Dle

3. RICHARDSONOVA TEORIE KONFLIKTU

různých interpretací můžeme za toto předválečné období uvažovat již rozmezí mezi lety 1870 až 1913. Vzpomeneme-li si na jeden způsob vyložení si konstant a a b , tedy jako hodnoty proporční ku průmyslu dané země, můžeme spekulovat, že stejně jako průmyslová kapacita, ani tyto parametry nemohou po delší časový úsek stejné. Tudíž by prodloužení časového úseku vedlo spíše ke zkreslení.

Stejně tak musíme pochybovat o tom zda fakt, že téměř shodné hodnoty rozdílů koeficientů $(a - c)$ a směrnice přímký (3.7), by mohl oním důkazem, jež by model ověřoval, dáno hrubostí odhadu těchto parametrů.

4. Lanchesterovy modely boje

Během první světové války se britský polyhistor Frederick William Lanchester zabýval sestavením modelů, jež by dokázaly předpovídat výsledky bojových střetnutí. Tyto modely dnes nazýváme Lanchesterovy modely boje.

Nehledě na fakt, že se Lanchester zabýval spíše leteckými konflikty, které v té době byly dosud nevídaným prostředkem vedení války, můžeme jeho modely vztáhnout i na boje na zemi.

Ačkoli se jedná o relativně jednoduché modely, dokážou nám poskytnout některé obecné závěry, jež je možné aplikovat nejen ve vojenství.

4.1. Model konvenčního boje

4.1.1. Sestavení modelu

Uvažujme bojový střet dvou konvenčních sil $x(t)$ a $y(t)$, jejich počet bojových prostředků v čase t označíme jako $x(t)$ a $y(t)$. Míra změny této hodnoty je míra posil, mínus míra bojových ztrát a míra nebojových ztrát:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ay(t) - cx(t) + P(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -bx(t) - ey(t) + Q(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nebojové ztráty definujeme jako ztráty způsobené nemocemi, nehodami, dezercí apod. Obecně je velmi těžké tento faktor nějakým způsobem určit, neboť závisí na spoustě faktorů, jež není lehké kvantifikovat, proto jej většinou neuvažujeme. V obecném modelu jsou vyjádřené výrazem $-cx(t)$ (resp. $-ey(t)$), kde kladné konstanty c, e jsou *koeficienty nebojových ztrát*.

Bojové ztráty vyjádříme výrazem $-ay(t)$ (resp. $-bx(t)$), kde kladné konstanty a, b jsou tzv. *bojové koeficienty*. K tomu abychom dané ztráty mohli takto vyjádřit, musíme si uvědomit, že náš model musí splňovat jisté podmínky. Za prvé obě vojska jsou viditelná a na každý z bojových prostředků je možno v jakémkoli okamžiku zaútočit. Dále, po každém fatálním zásahu je útok okamžitě koncentrován na zbylé bojové prostředky.

Posily jsou mírou, s kterou bojové prostředky vstupují do souboje, či z něj jsou stahováni. Označíme je $P(t)$ a $Q(t)$.

Pro kvalitativní analýzu systému je vhodné si systém rovnic (4.1) zjednodušit, a to tak že navíc k nebojovým ztrátám také neuvažujeme posily. Jedná se tedy o střet dvou izolovaných armád, jejichž systém rovnic vypadá následovně:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ay(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -bx(t).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Jedná se o systém obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, které umíme explicitně vyřešit.

Počátečními podmínkami rozumíme počet bojeschopných jednotek jednotlivých vojsk na začátku střetu

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0. \quad (4.3)$$

4.1.2. Stabilita systému

Z hlediska interpretace potřebujeme posoudit stabilitu libovolného řešení systému (4.2), neboť pro stabilitu lineárních systémů platí, že všechna řešení systému (4.2) jsou stabilní, asymptoticky stabilní či nestabilní, právě tehdy když nulové řešení tohoto systému (4.2) je stabilní, asymptoticky stabilní či nestabilní. Stačí se tedy omezit na diskuzi stability nulového řešení, které je i rovnovážným bodem soustavy (4.2) (viz. Matematický aparát - Poznámka 2.2.3).

Sestrojíme Jacobiho matici systému

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

pro níž platí, že je totožná s maticí soustavy \mathbf{A} (viz. Matematický aparát - Poznámka 2.2.2) a určíme její vlastní čísla z charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) \lambda^2 - ab = 0, \\ \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{ab}.$$

Vidíme, že reálné části vlastních čísel mají různá znaménka, jedná se tedy o systém nestabilní se singulárním bodem v $[0,0]$, jež je sedlem.

Pro názornost se můžeme podívat na fázový portrét soustavy (4.2). Vezmeme rovnice systému (4.2) a navzájem je vydělíme:

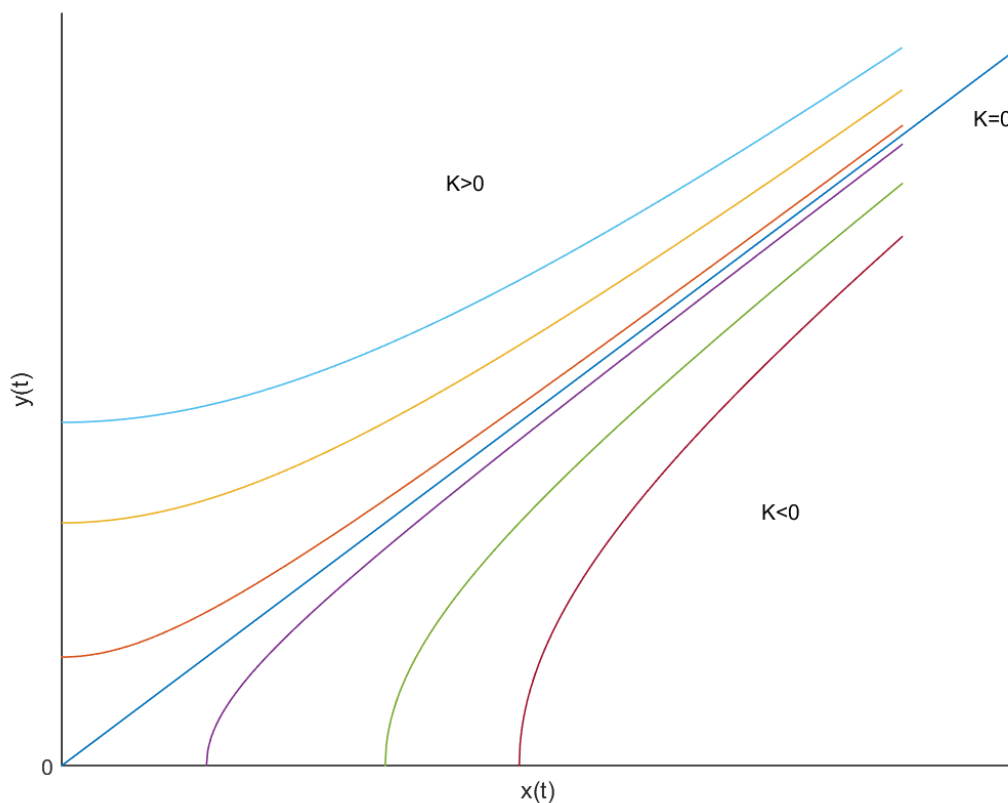
$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}, \\ aydy = bxdx,$$

a integrací obdržíme

$$ay^2 - bx^2 = K. \quad (4.4)$$

Rovnici (4.3) nazveme "Lanchester square law". Ta nám definuje soubor hyperbol jež jsou trajektoriemi řešení soustavy rovnic (4.2)

4.1. MODEL KONVENČNÍHO BOJE



Obrázek 4.1: Příklad trajektorií určených rovnicí (4.4) v prvním kvadrantu

4.1.3. Řešení rovnic

Pro další kvalitativní analýzu systému (4.2) není předešlý způsob vhodný, proto nalezneme řešení této soustavy s explicitní závislostí na čase t .

Vyjdeme z předešlé kapitoly, kde jsme si vyjádřili vlastní čísla soustavy (4.2). Tyto vlastní čísla nám určují obecné řešení

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{ab}t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}t}, \quad (4.5)$$

nyní hledáme řešení vyhovující našim poč. podmínkám. Nejprve obecné řešení zderivujeme

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_1 \sqrt{ab} e^{\sqrt{ab}t} - C_2 \sqrt{ab} e^{-\sqrt{ab}t}, \quad (4.6)$$

dosadíme-li počáteční podmínky do rovnic (4.5) a (4.6), obdržíme

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2, \\ -by_0 &= C_1 \sqrt{ab} - C_2 \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Po úpravách dostáváme výrazy pro konstanty C_1 a C_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0\sqrt{\frac{b}{a}}, \\ C_2 &= \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0\sqrt{\frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

Řešení je tedy tvaru

$$x(t) = x_0 \frac{e^{\sqrt{ab}t} + e^{-\sqrt{ab}t}}{2} - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{\sqrt{ab}t} - e^{-\sqrt{ab}t}}{2}.$$

Užitím vztahů $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dostáváme předpis řešení s explicitní závislostí na čase t odpovídající počátečním podmínkám:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cosh(\sqrt{ab}t) - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(\sqrt{ab}t), \\ y(t) &= y_0 \cosh(\sqrt{ab}t) - x_0 \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(\sqrt{ab}t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.1.4. Vyjádření charakteristik průběhu boje

Čas ukončení boje

Časem t_x rozumíme čas kdy se stav bojových prostředků vojska x dostane na nulu, tedy $x(t_x) = 0$. Tento čas se tedy snažíme nalézt.

První z rovnic (4.7) upravíme jako

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\sqrt{ab}t_x)}{\cosh(\sqrt{ab}t_x)} &= \frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}}, \\ \operatorname{tgh}(\sqrt{ab}t_x) &= \frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}}, \end{aligned}$$

vyjádříme čas t_x

$$t_x = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

a využitím vztahu $\operatorname{arctgh} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ upravíme na výsledný tvar:

$$t_x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{y_0\sqrt{b} + x_0\sqrt{a}}{y_0\sqrt{b} - x_0\sqrt{a}}. \quad (4.8)$$

Tím jsme dostali čas ukončení bojů prohrou vojska x . Obdobným postupem si vyjádříme i čas t_y tedy čas kdy prohrává vojsko y a boje končí.

$$t_y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b}}{x_0\sqrt{a} - y_0\sqrt{b}}. \quad (4.9)$$

Stav bojeschopných prostředků na konci boje

Když nyní známe časy kdy dojde ke zničení jednoho z vojsk, jsme schopni vyjádřit kolik bojeschopných prostředků zůstává vojsku vítěznému. Hledáme tedy hodnoty pro $x(t_y)$ resp. $y(t_x)$. Zaměříme se více na případ první, neboť postup bude u obou opět podobný. Dosazením do (4.7) dostáváme

$$x(t_y) = x_0 \cosh(\sqrt{ab}t_y) - y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(\sqrt{ab}t_y),$$

4.2. MODEL SMÍŠENÉHO KONVENČNÍHO A PARTYZÁNSKÉHO BOJE

z předchozí kapitoly víme, že $y(t_y) = 0$ a tedy

$$\cosh(\sqrt{abt_y}) = \frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(\sqrt{abt_y}).$$

Dosadíme tedy za $\cosh(\sqrt{abt_y})$ a upravíme

$$\frac{x(t_y)}{x_0} = \sinh(\sqrt{abt_y}) \left(\frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

Využitím výrazu $\sinh(x) = \frac{\operatorname{tgh}(x)}{\sqrt{1-(\operatorname{tgh}(x))^2}}$ dostáváme

$$\frac{x(t_y)}{x_0} = \frac{\operatorname{tgh}(\sqrt{abt_y})}{\sqrt{1-(\operatorname{tgh}(\sqrt{abt_y}))^2}} \left(\frac{x_0}{y_0} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

A z předešlé kapitoly navíc víme, že $\operatorname{tgh}(\sqrt{abt_x}) = \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}}$ a tedy po úpravách můžeme psát

$$\frac{x(t_y)}{x_0} = \frac{1 - \left(\frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme výraz pro počet bojeschopných jednotek vojska x v čase t_y

$$x(t_y) = \sqrt{x_0^2 - \frac{b}{a} y_0^2} = \sqrt{\frac{1}{a} (ax_0^2 - by_0^2)}. \quad (4.10)$$

Podobným postupem se lze dopočítat i výrazu pro $y(t_x)$ kdy vítězí vojsko y

$$y(t_x) = \sqrt{y_0^2 - \frac{a}{b} x_0^2} = \sqrt{\frac{1}{b} (by_0^2 - ax_0^2)}. \quad (4.11)$$

4.2. Model smíšeného konvenčního a partyzánského boje

4.2.1. Sestavení modelu

Uvažujme střet partyzánského vojska $x(t)$ s konvenčním vojskem $y(t)$, které definujeme jako počet bojových prostředků v čase t . Úvaha vedoucí ke konstrukci modelu je podobná jako v případě modelu konvenčního. Bojové ztráty zde definujeme stejně jako v modelu konvenčním, až na ztráty partyzánského vojska, které závisí nejen na velikosti vojska konvenčního $x(t)$, ale i na velikosti partyzánského vojska $y(t)$ samotného.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -ay(t)x(t) - cx(t) + P(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -bx(t) - ey(t) + Q(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Konstanty a, b, c, e zde mají stejný význam, jako u modelu konvenčního.

Z podobných důvodů, jako u modelu předešlého pracujeme při jeho analýze se zjednodušenou variantou:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ay(t)x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -bx(t).\end{aligned}\tag{4.13}$$

4.2.2. Stabilita rovnovážných stavů

Jelikož systém (4.13) je nelineárním, nemůže zde hovořit o stabilitě systému. Můžeme se však zabývat stabilitou rovnovážných bodů, čímž můžeme zjistit něco o chování systému jako takového.

Určeme nejdříve rovnovážné body dosazením za $x(t) = x^*$ a $y(t) = y^*$ do (4.9)

$$\begin{aligned}0 &= -ay^*x^*, \\ 0 &= -bx^*,\end{aligned}$$

čímž dostáváme

$$\begin{aligned}x^* &= 0 \\ y^* &= \hat{y}, \quad \hat{y} \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Máme tedy nekonečně mnoho rovnovážných bodů ležících na ose y .

K určení stability výše uvedených rovnovážných bodů provedeme linearizaci soustavy na jejich okolí a zanalyzujeme vlastní čísla Jacobiho matic příslušných rovnovážných bodů těchto linearizovaných soustav.

Jacobiho matice příslušná rovnovážným bodům má tvar

$$\mathbf{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -a\hat{y} & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Určeme její vlastní čísla jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + a\hat{y}\lambda = 0.$$

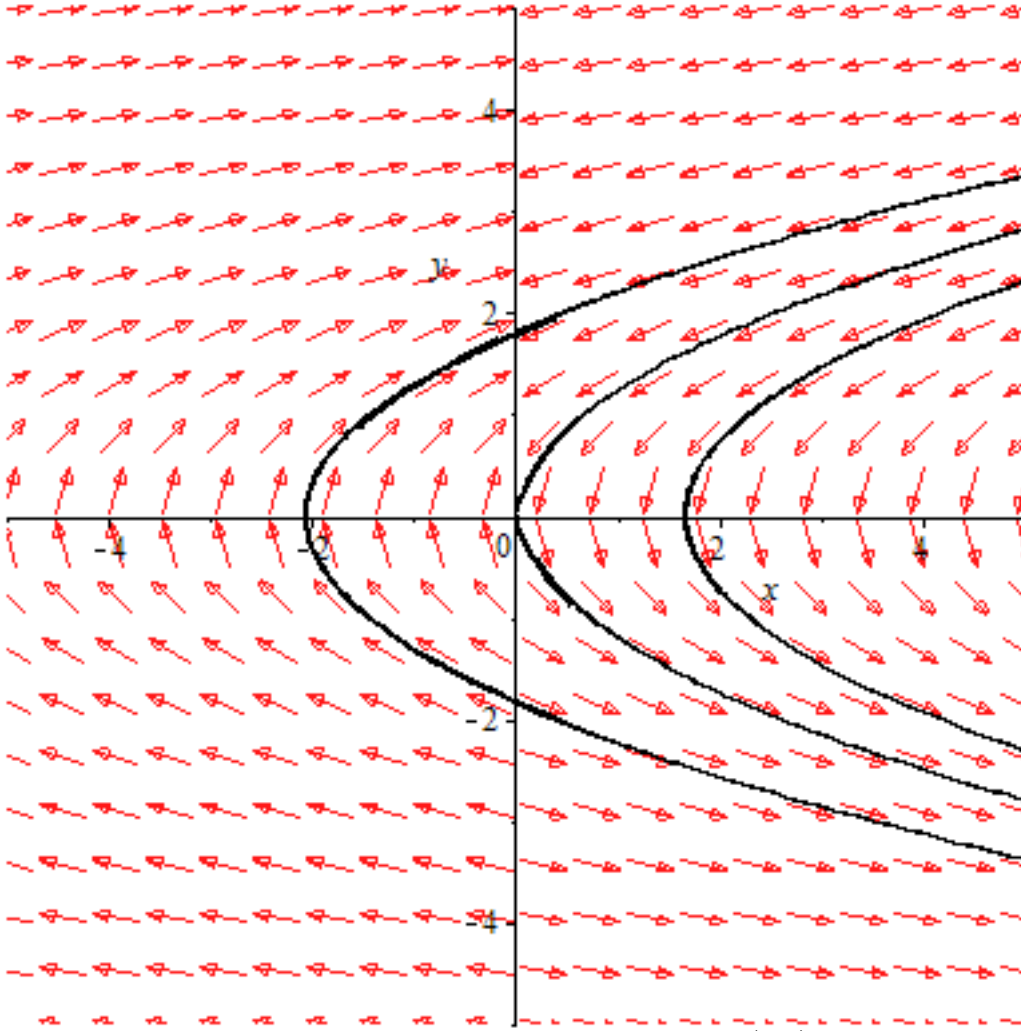
Vlastní čísla tedy mají tvar

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -a\hat{y}.$$

Je zřejmé, že pro $\hat{y} < 0$ jsou rovnovážné body nestabilní, neboť podle linearizační věty (viz Matematický aparát - Věta 2.2.1) platí, že je-li jedno z vlastních čísel rovnovážného bodu kladné, pak je tento rovnovážný bod nestabilní. Pro $\hat{y} \geq 0$ není možné pomocí linearizační metody určit zda-li jsou dané rovnovážné body stabilní či nestabilní, neboť jedno z vlastních čísel má nulovou reálnou část a druhé nekladnou reálnou část a jedná se tedy o nehyperbolické stacionární body (viz Matematický aparát - Poznámka 2.2.4.). Můžeme se však pokusit určit stabilitu těchto bodů z fázového portréту dané soustavy. K jeho určení postupujeme podobně jako u modelu předešlého, čímž dostáváme rovnici, která určuje systém parabol, jež jsou trajektoriemi dané soustavy, ve tvaru

$$ay^2 - 2bx = L,\tag{4.15}$$

4.2. MODEL SMÍŠENÉHO KONVENČNÍHO A PARTYZÁNSKÉHO BOJE



Obrázek 4.2: Fázový portrét soustavy (4.4)

Z fázového portréту (Obrázek 4.2) vidíme, že pro $y > 0$ jsou dané stacionární body stabilní avšak s přihlédnutím na tvary trajektorií můžeme usoudit že nejsou asymptoticky stabilní, neboť při malé poruše již nekonvergují ke stejnému rovnovážnému bodu.

4.2.3. Řešení soustavy

Systém rovnic (4.14) je nelineární a obecně nelze tyto explicitně řešit. V tomto případě se však jedná o typ který vyřešit jde, jelikož se nejedná o příliš silnou nelinearitu. Najdeme tedy pro další analýzu systému (4.4) řešení s explicitní závislostí na čase t . Z rovnice (4.15) vyjádříme ax a y a dosadíme do (4.14):

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{ax}\sqrt{2bx + L}, \quad (4.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(ay^2 - L). \quad (4.17)$$

Vydeme nyní z rovnice (4.17) kterou upravíme a řešíme pomocí separace proměnných

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2bx + L}} = -\sqrt{a} \int dt. \quad (4.18)$$

Počítejme nyní pro $L > 0$. Provedme substituci $\tau^2 = 2bx + L$ a dostaneme tvar rovnice

$$\int \frac{2d\tau}{x\sqrt{\tau^2 - L}} = -\sqrt{a} \int dt.$$

Integrací dostáváme rovnici

$$\ln \left(\frac{\tau - \sqrt{L}}{\tau + \sqrt{L}} \right) = -\sqrt{aL}t + C_1,$$

kde C_1 je konstanta. Vyjádříme si τ jako

$$\tau = \sqrt{L} \left(\frac{1 + C_1 e^{-\sqrt{aL}t}}{1 - C_1 e^{-\sqrt{aL}t}} \right).$$

Po zpětné substituci si vyjádříme výraz pro $x(t)$ pro $L > 0$

$$x(t) = \frac{L}{2b} \left[\left(\frac{1 + C_1 e^{-\sqrt{aL}t}}{1 - C_1 e^{-\sqrt{aL}t}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.19)$$

Tvar konstanty C_1 je po dosazení počátečních podmínek $x(0) = x_0$ $y(0) = y_0$

$$C_1 = 1 - \frac{\sqrt{aL}y_0 - L}{bx_0}.$$

Nyní se vraťme k rovnici (4.19) a řešme ji pro $L=0$. Pomocí separace proměnných dostáváme

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -\sqrt{2ab} \int dt,$$

integrací dostaneme řešení pro $x(t)$ za podmínky $L = 0$ ve tvaru

$$x(t) = \frac{4}{(\sqrt{2abt} + C_2)^2},$$

kde C_2 je konstanta, jež má po dosazení počáteční podmínky $x(0) = x_0$ tvar

$$C_2 = \frac{2}{\sqrt{x_0}}.$$

Nyní ještě nutno vyřešit rovnici (4.19) pro $L < 0$. Provedme tedy substituci $\tau^2 = 2bx + l$ a úpravami dostaneme vztah

$$\int \frac{2}{\frac{\tau^2}{|L|} + 1} = -\sqrt{a} \int dt,$$

poté pomocí substituce $x^2 = \frac{\tau^2}{|L|}$ a následné integrace získáme rovnici

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\tau}{\sqrt{L}} \right) = \frac{C_3 - \sqrt{a|L|}t}{2}, \quad (4.20)$$

4.2. MODEL SMÍŠENÉHO KONVENČNÍHO A PARTYZÁNSKÉHO BOJE

a pomocí zpětné substituce $\tau = \sqrt{2bx + L}$ dostaneme výsledný tvar pro $x(t)$

$$x(t) = \frac{L}{2b} \left[\operatorname{tg}^2 \left(\frac{C_3 - \sqrt{a|L|}t}{2} - 1 \right) \right], \quad (4.21)$$

kde $L < 0$. Dosazením počáteční podmínky $x(0) = x_0$ dostaneme tvar konstanty C_3

$$C_3 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2bx_0 + L}{|L|}} \right).$$

Podobně jako u rovnice (4.17) postupujeme nyní u rovnice (4.18), kterou si opět pomocí separace proměnných přepíšeme na tvar

$$- \int \frac{2dy}{ay^2 - L} = \int dt. \quad (4.22)$$

Tuto rovnici řešíme nejprve pro případ $L > 0$, tedy integrujeme

$$\ln \left(\frac{\sqrt{ay} + \sqrt{L}}{\sqrt{ay} - \sqrt{L}} \right) = \sqrt{aL}t + C_4,$$

a postupnými úpravami můžeme vyjádřit výraz pro $y(t)$ jako

$$y(t) = \frac{\sqrt{L}(C_4 e^{\sqrt{aL}t} + 1)}{\sqrt{a}(C_4 e^{\sqrt{aL}t} - 1)}, \quad (4.23)$$

kde $L > 0$. Dosazením počáteční podmínky $y(0) = y_0$ získáme tvar konstanty C_4 :

$$C_4 = \frac{ay_0^2 + 2\sqrt{aL}y_0 + L}{ay_0^2 + L}.$$

Zpět nyní k rovnici (4.20) kterou vyřešíme pro $L = 0$ dostáváme

$$-\frac{2}{a} \int \frac{dy}{a^2} = \int dt,$$

tuto rovnici lze integrovat přímo, a tedy platí

$$y(t) = \frac{2}{a(t + C_5)}.$$

Po dosazení počáteční podmínky $y(0) = y_0$ získáme výraz pro konstantu C_5

$$C_5 = \frac{2}{ay_0}.$$

Nutno ještě spočítat rovnici pro $L < 0$ kterou si nejprve upravíme na tvar

$$\frac{2}{L} \int \frac{dy}{\frac{a}{|L|}y^2 + 1} = \int dt.$$

Poté pomocí substituce $\tau^2 = \frac{a}{|L|}y^2$ dostaneme ji na tvar

$$-\frac{2}{\sqrt{a|L|}}\operatorname{arctg}(\tau) = t - C_6,$$

vyjádříme si τ

$$\tau = -\operatorname{tg}\left(\frac{(t + C_6)\sqrt{a|L|}}{2}\right),$$

a pomocí zpětné substituce získáme výraz pro

$$y(t) = -\sqrt{\frac{|L|}{a}}\operatorname{tg}\left(\frac{(t + C_6)\sqrt{a|L|}}{2}\right), \quad (4.24)$$

kde $L < 0$.

Dosadíme-li počáteční podmínku $y(0) = y_0$ dostáváme výraz pro konstantu C_6

$$C_6 = -\frac{2}{\sqrt{a|L|}}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{|L|}y_0\right).$$

4.2.4. Vyjádření charakteristik průběhu boje

Nyní když se nám podařilo najít řešení s explicitní závislostí na čase t pro tuto soustavu, můžeme provést analýzu stejných charakteristik jako v modelu předešlém

Čas ukončení boje

Opět hledáme časy t_x , t_y kdy stav jednoho z vojsk je nulový a nastává vítězství vojska druhého. Nejprve tak učiníme pro t_y tedy stav $y(t_y) = 0$. Z fázového portréту (Obr. 4.2) je vidět, že k takovému stavu dojde, platí-li že $L < 0$, nebereme-li v úvahu možnost kdy nevyhraje ani jedno z vojsk ($L = 0$). Vyjdeme z rovnice (4.20)

$$t_y = -C_6 = \frac{2}{\sqrt{a|L|}}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{|L|}y_0\right), \quad (4.25)$$

jedná se tedy o čas kdy dojde k vítězství vojska x .

Chceme-li však určit čas t_x tedy čas kdy vojsko x nabude nulového stavu $x(t_x) = 0$ a nastane vítězství vojska y , objeví se problém, neboť pohlédnutím na fázový portrét soustavy (viz obr. 4.2) zjistíme, že takový stav je rovnovážným bodem soustavy a blížíme se k němu asymptoticky, tedy čas $t_x = \infty$.

Neznamená to však, že k porážce partyzánského vojska nikdy nedojde, jedná se spíše o důkaz nedokonalosti našeho modelu u kterého zde narážíme na hranice jeho možností.

Stav bojeschopných prostředků na konci boje

Z předešlé kapitoly je zřejmé, že má smysl vyjádřit tuto charakteristiku pouze pro vojsko x v čase t_y . A tedy dosadíme-li čas t_y (4.26) do vztahu (4.22), dostáváme výraz pro stav bojeschopných prostředků vojska x v čase vítězství t_y :

$$x(t_y) = \frac{L}{2b}\operatorname{tg}^2\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2bx_0 + L}{|L|}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{ay_0}{|L|}\right)\right].$$

4.3. Diskuze parametrů

Aby bylo možné s našimi modely nějak dále pracovat, je nutné zaměřit se na problematiku určování parametrů a, b, c, e .

Jak již bylo zmíněno dříve, co se týče parametrů c a e , je tento úkol téměř nemožný, bereme-li v potaz na kolika různých proměnných, které se ne vždy dají lehce kvantifikovat, by tento parametr musel záviset. Navíc je jejich efekt na samotný boj většinou minimální. Proto obvykle tyto parametry neuvažujeme, je však dobré je, pro úplnost, alespoň uvést. Zajímají nás tedy především parametry a a b , tedy koeficienty bojových schopností daných vojsk. Obecně můžeme říci, že na výběr máme mezi dvěma principy, jak tyto konstanty nalézt. Můžeme buď vyjít z jichž známých dat o daném bojovém střetnutí, či můžeme na základě dat a vlastností, které nám jsou známy ještě před samotnou bitvou tyto konstanty vyjádřit.

Je zřejmé, že má jistě větší smysl rozvíjet druhou zmíněnou metodu určování těchto parametrů, pakliže chceme modelovat průběh obecných bitev. Některé z takových postupů si nyní přiblížíme.

Jedním ze způsobů jak určit obecný bojový koeficient a , jež detailněji popsán v publikaci [3], je chápat jej jako hustotu toku úspěšných výstřelů. V takovém případě platí

$$a = p \cdot k,$$

kde je hustota toku výstřelů a a p je pravděpodobnost s níž dojde k zásahu cíle jednotlivým výstřelem. Tokem rozumíme posloupnost jednotlivých událostí (výstřelů), ke kterým dojde za určitý časový interval. Zde tok výstřelů chápeme jako Poissonův tok událostí, pro nějž platí tedy platí výše zmíněný vztah.

Tento způsob určení parametrů a a b je jistě velmi užitečný, neboť nezávisí na samotných datech z bitvy, ale jsme jej schopni spočítat již předem, což je jistě výhodné, chceme-li modelovat konflikty k nimž ještě nedošlo. Parametry p a k je možné kupříkladu získat ze specifikací použité výzbroje daných vojsk, pokud takové existují.

Dalším způsobem jak bojové konstanty určit, je použít data z bitev, ke kterým již došlo. Mohlo by se zdát, že takový postup je zbytečný, zvláště pak snažíme-li se naším modelem spíše výsledky bitev předpovídat. Můžeme však předpokládat, že jistá bojová střetnutí mohou mít určité charakteristické aspekty společné. Za tohoto předpokladu je rozumné předpokládat, že podaří-li se nám z jistého počtu dat vypočítat hledané parametry a a b , pak je můžeme brát za poměrně dobré odhady pro náš modelový příklad.

Jeden takový vztah pro hledané konstanty je možno získat přímo vyjádřením koeficientů a a b ze soustavy rovnic (4.2) pro obecný interval $\langle 0; \tau \rangle$

$$\begin{aligned} x(\tau) - x_0 &= -a \int_0^\tau x(t) dt, \\ a &= \frac{x_0 - x(\tau)}{\int_0^\tau y(t) dt}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

obdobně pro b

$$b = \frac{y_0 - y(\tau)}{\int_0^\tau x(t) dt}. \tag{4.27}$$

4.4. Bitva v Ardenách

V rámci aplikace Lanchesterových modelů boje na reálná data se zaměříme na jednu z klíčových částí 2. světové války a to na *Bitvu v Ardenách*, též známou jako *Bitva o výběžek (Battle of the Bulge)*. Jednalo se o poslední zoufalý tah Hitlera jak zvrátit průběh války, která se v té době již vyvíjela ve prospěch Spojenců.

První boje začaly překvapivou ofenzívou německých vojsk 16. prosince 1944 proti Spojenci řídké osazené frontě v Ardenách. Plán byl v těchto místech prorazit linii, rychle postoupit k přístavnímu městu Antverpy a tím rozdělit americké a britské vojska. Americké armádě se však podařilo postup Němců zpomalit a následně zcela zastavit.

Útok německých vojsk trval od začátku kampaně 16. prosince až do 26. prosince. Od té doby však iniciativu převzala vojska Spojenců, která začala svou protiofenzívu. 16. ledna byla fronta opět posunuta do stavu ve kterém byla před kampaní.

Cílem této kapitoly bude prozkoumat využitelnost a vhodnost Lanchesterova modelu konvenčního boje na datech z Bitvy v Ardenách. Tento model volíme z důvodu jeho jednoduchosti a snadnosti s ním s ním můžeme pracovat.

4.4.1. Historická data

Data, jež využijeme v naší analýze je možné dohledat v oficiální databázi Armády spojených států z této bitvy [11]. Pro naše účely však postačí jejich zpracování z publikace [5], neboť obsahuje potřebnou část dat, kterou zde využijeme.

Tabulky (viz Příloha 1) znázorňují počty jednotlivých vojenských prostředků (vojáků, tanků, obrněných transportérů, dělostřelectva) v jednotlivých dnech boje.

Nutno podotknout, že tato data byla lehce upravena, z důvodu jejich přílišné complexity díky které by náš model nemusel vůbec fungovat, způsob jakým byla data upravena je uveden v [5]. Původně je totiž nebylo možné, dosadit do modelu, jelikož obsahovala prvky, s nimiž náš model nepočítá.

Data která v daných zdrojích k nalezení nejsou, jsou hodnoty pro agregovanou bojovou sílu. Tuto položku jsme museli vytvořit, aby bylo možné data naším modelem vůbec zpracovat, neboť tím jsme schopni vyřešit nehomogenitu bojových prostředků. Proto přepočítáme agregované hodnoty bojových prostředků, tak že tankům, obrněným transportérům (OT), Artilerii a pěším vojákům přiřadíme příslušné váhy 20, 5, 40 a 1. Tyto čísla vychází z běžných metod užívaných Armádou spojených států amerických. Takto najdeme vždy v posledním sloupci dané tabulky (viz. Příloha 1).

4.4.2. Použitý model

Jak již bylo zmíněno, použijeme pro naše účely model konvenčního boje. Z charakteru dat jej můžeme zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ay(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -bx(t).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Takto formulovaný model jsme již zkoumali, na všechny jeho hlavní charakteristiky je tedy možno odkázat v předešlých kapitolách.

4.4. BITVA V ARDENÁCH

Určení bojových koeficientů

Pro určení koeficientů a a b použijeme vztahy (4.26) a (4.27). Integrály, jež nemůžeme přímo vyjádřit, aproximujeme Riemannovou sumou:

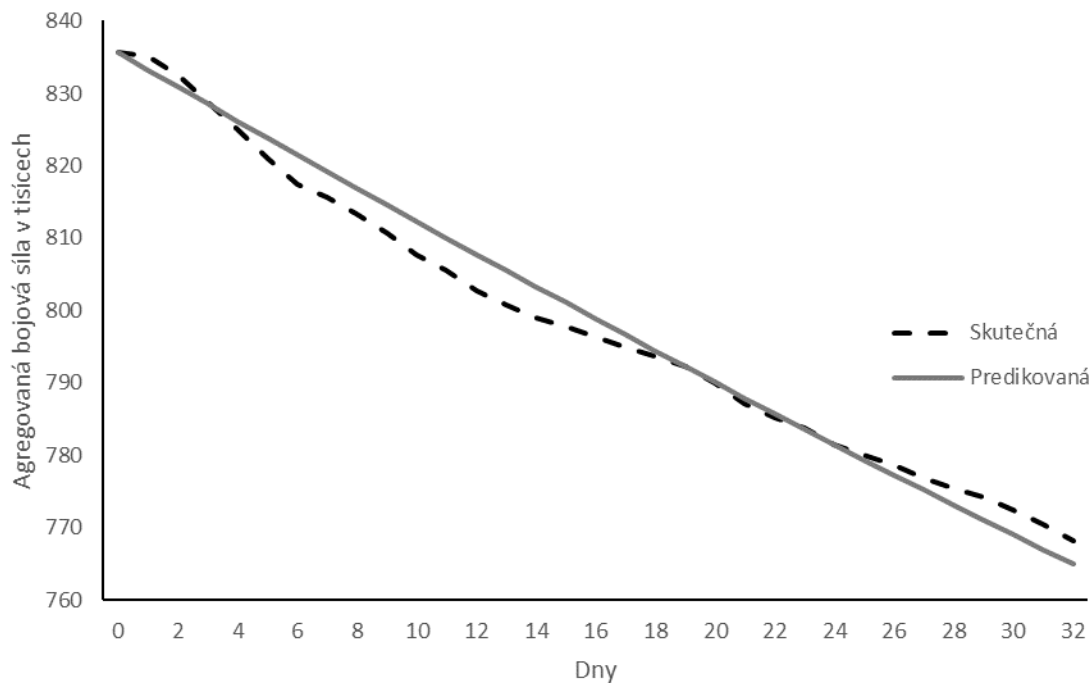
$$\begin{aligned} a &= \frac{x_0 - x(32)}{\sum_{i=0}^{32} y(i)}, \\ a &= \frac{835619 - 768150}{18574692}, \\ a &= 0,003632308, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{y_0 - y(32)}{\sum_{i=0}^{32} x(i)}, \\ b &= \frac{616900 - 514727}{26349458}, \\ b &= 0,003877613. \end{aligned} \tag{4.30}$$

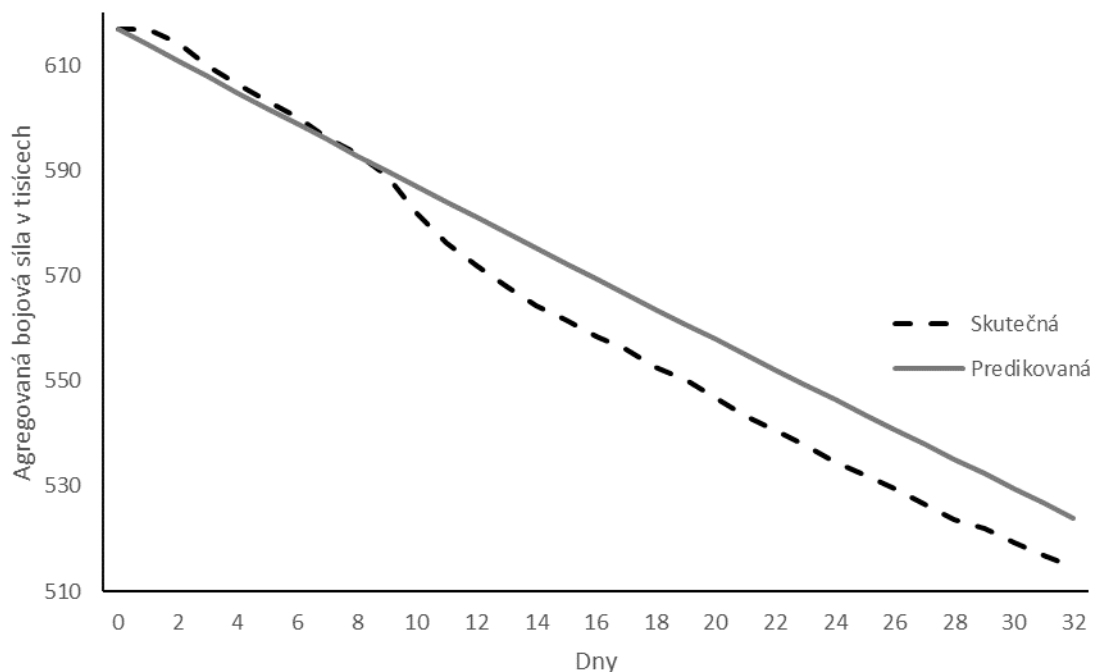
Vidíme, že se jedná o velmi malé hodnoty, které jsou téměř totožné. To by mohlo odpovídat realitě.

4.4.3. Porovnání skutečných hodnot s predikovanými

Vyneseme skutečná data z tabulek (viz Příloha 1) a data vypočtená dle vztahů (4.7) dosazením za t , do grafu pro jednotlivá vojska



Obrázek 4.3: Agregovaná bojová síla Armády spojených států v závislosti na čase



Obrázek 4.4: Agregovaná bojová síla německé armády v závislosti na čase

4.4.4. Hodnocení

Je vidět, že hodnoty, jež jsme vypočítali pomocí našeho modelu, alespoň v případě Armády spojených států poměrně dobře kopírují skutečné počty bojových prostředků. U německé armády již jistou odlišnost od dat skutečných vypořádat můžeme, alespoň od 9. dne bojů, kde se rozdíl mezi skutečnými a predikovanými daty v jednotlivých dnech nabývá hodnoty až 10000. Můžeme však konstatovat, že trend obou křivek je velmi podobný, ostatně to můžeme říct o křivkách v obou grafech. Mohli bychom tedy říci, že Lanchesterův model v rámci námi určených podmínek boje v Ardenách modeluje poměrně dobře. Je na místě, ale poukázat na nestabilitu systému, která se pro krátký interval 32 dnů nemusela zcela projevit a je tedy možné, že pro delší průběh bojů by již větších a dost možná neakceptovatelných chyb.

Jeden z hlavních faktorů ovlivňující kvalitu modelu je také jisté určení, bojových konstant a a b . Proč tomu tak je jsme přiblížili v minulé kapitole. V našem případě jsme se rozhodli použít způsob určení těchto konstant na základě již známých dat z boje, neboť informace nutné k použití jiných metod nemáme bohužel k dispozici. Není tedy příliš pozoruhodné, že s použitím takto zvolených parametrů dosahujeme poměrně dobré shody dat.

5. Závěr

Cílem bakalářské práce bylo sestavení základních matematických modelů, jež se používají při analýze vojenských konfliktů. Jednalo se zde o Lanchesterův model popisující bitvu dvou vojsk a o Richardsonův model popisující vzájemné vztahy dvou znesvářených států. Zabývali jsme se jejich charakteristickými vlastnostmi a interpretacemi v reálném světě. Především jsme se zaměřili na stabilitu obou systémů, přesněji na stabilitu jejich rovnovážných bodů. Zároveň jsme se pokusili výsledky této analýzy interpretovat v realitě.

Nejprve jsme se zabývali modelem Richardsonovým. Zde jsme odvodili jeho základní tvar a poté v rámci stability rovnovážných bodů, kterou jsme interpretovali jako udržitelný mír, diskutovali jeho různé kombinace a jejich význam v reálném světě, což nám ukázalo, že do jisté míry realitě určitě odpovídá a má tedy smysl se jím dále zabývat. Odvodili jsme poté podmínku stability rovnovážného bodu i pro obecný systém.

Poté jsme se zabývali problematikou určování koeficientů vystupujících v daných soustavách a jejich interpretací. Zdůraznili jsme jak důležitou roli hrají v těchto systémech a jaký je jejich význam v otázce stability. U Richardsonova modelu jsou přímo spjaty s podmínkou stability $ce > ab$. Tedy volba těchto parametrů je zásadní pro otázku stability.

Na závěr této kapitoly jsme se pokusili ověřit zda-li je tento model dobrou simulací mezinárodních vztahů za podmínek určenými Richardsonem. K tomu jsme použili data, s nimiž sám pracoval a nichž demonstroval funkčnost modelu. Z analýzy dat v této práci však vyplývá, že výsledky nejsou dostatečně průkazné, abychom mohli správnost modelu potvrdit z diskuze o jeho omezeních, vyplývá spíše opačný názor.

U Lanchesterových modelů jsme provedli důkladné analýzy dvou vybraných modelů, a to modelu konvenčního boje a smíšeného boje u nichž jsme odvodili jejich základní tvary. U modelu konvenčního boje jsme odvodili systém lineárních diferenciálních rovnic. Zabývali jsme se v něm otázkou stability rovnovážného bodu, který splýval s otázkou stability systému. Systém se ukázal být nestabilní s jediným rovnovážným bodem typu sedlo v jeho počátku. Dále jsme vyjádřili jeho základní charakteristiky vyplývající z řešení soustavy s explicitní závislostí na čase t a to čas ukončení boje a stav bojeschopných prostředků na konci boje.

U Lanchesterova modelu smíšeného boje jsme se, z důvodu nelinearity systému, pokusili řešit problém stability rovnovážných bodů systému, jež se nacházely na ose y , na jejich okolí pomocí linearizační metody, jednalo se však o nehyperbolické rovnovážné body a tudíž jsme nebyli schopni problematiku jejich stability danou metodou řešit. Odkázali jsme tedy na fázový portrét soustavy a provedli grafickou analýzu stability těchto rovnovážných stavů.

Na závěr kapitoly o Lanchesterových modelech jsme náš model konvenčního boje podrobili zkoušce na datech z Bitvy v Ardenách. S užitím konstant, jež jsme získali pomocí vztahů zohledňující pouze data z bitvy, se nám podařilo dosáhnout poměrně dobrých výsledků. S odkazem na tento fakt, je třeba říci, že není výsledky možné brát jako důkaz toho, že se jedná o přesný model, jímž bychom mohli bitvy i předpovídat.

Je nutno říci, že jak v případě modelu Richardsonového, tak v případě modelů Lanchesterových, především pro konvenční boj, je jejich jednoduchost zároveň velkým pozitivem i negativem. Svou názorností nám pomáhají pochopit problematiku. Při snaze aplikovat je na reálná data je jejich jednoduchost však přítěží. Na výsledky této práce by bylo

možné navázat různými modifikacemi popsaných modelů a hlubší analýzou dat k určení parametrů systémů s využitím statistických metod.

Literatura

- [1] BRAUN, Martin: *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*. 4th ed. New York: Springer-Verlag, c1993. ISBN 0-387-97894-1.
- [2] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [3] SEBEROVÁ, Helena a Miroslav NAVRÁTIL: Modelování boje pomocí Lanchesterových rovnic. In *Pravděpodobnost a matematická statistika, matematické modelování bojové činnosti: Přednáškové texty z matematiky*. Vyškov: VVŠ PV, 1988.
- [4] RAPOPORT, Anatol. Lewis F. Richardson's mathematical theory of war. *Journal of Conflict Resolution* [online] [cit. 2017-05-18]. September 1957, vol. 1, no. 3, p. 249-299. ISSN 0022-0027.
- [5] FRICKER, D. Ronald. Attrition models of the Ardennes campaign. *Naval Research Logistics* February 1998, vol. 45, no. 1, p. 1-22. ISSN 1520-6750.
- [6] FRANČŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice* [online] [cit. 2017-05-20] Dostupné z http://www.mat.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=3923 .
- [7] POKORNÝ, Pavel. *Deterministický chaos - plod počítačové fyziky*. Československý časopis pro fyziku [online] [cit. 2017-05-21]. Vydáno: 2008, vol. 58, no. 6. Dostupné z http://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/zluty/08-6_328-338_Pokorny_Deterministicky_chaos.pdf.
- [8] PERRY, Nigel. *Applications of Historical Analyses in Combat Modelling* [online] [cit. 24.5.2017]. Dostupné z: <http://dspace.dsto.defence.gov.au/dspace/handle/1947/10171>
- [9] BÁRTA, Tomáš. [online]. [cit. 20.5.2017]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/pcODR/pcODR/Kapitola-Stabilita/stabilita.pdf>.
- [10] VANĚČKOVÁ, Pavla. *Matematické modely a jejich analýza* [online]. Brno, 2007, s. 29-33. [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/43455/prif_m/ [Diplomová práce]. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Josef Kalas.
- [11] Data Memory Systems Inc., *The Ardennes Campaign Simulation Data Base (ACSDB)*, Phase II Final Report No. AD-240088, National Technical Information Service, February 1990.

6. Seznam příloh

Příloha 1	30
---------------------	----

7. Přílohy

Příloha 1: Data bitvy v Ardenách

Dny	Vojáci	Tanky	OT	Artilerie	Agr. Bojová síla
0	513514	5350	8821	4275	835619
1	513056	5349	8821	4275	835141
2	511467	5337	8788	4260	832547
3	509084	5294	8742	4251	828714
4	506999	5234	8724	4245	825099
5	504824	5170	8687	4231	820899
6	503435	5137	8676	4198	817475
7	502261	5127	8670	4188	815671
8	500356	5112	8657	4186	813321
9	498808	5076	8651	4176	810623
10	497200	5028	8633	4171	807765
11	495673	5004	8631	4167	805588
12	493353	4984	8629	4163	802698
13	491977	4965	8626	4160	800807
14	490700	4947	8623	4158	799075
15	489695	4931	8621	4158	797740
16	488653	4911	8621	4158	796298
17	487494	4901	8619	4157	794889
18	486490	4887	8619	4157	793605
19	485658	4863	8619	4157	792293
20	483827	4837	8619	4156	789902
21	481568	4815	8619	4153	787083
22	479929	4802	8617	4153	785174
23	478701	4789	8617	4153	783686
24	476833	4777	8617	4152	781538
25	475557	4768	8617	4152	780082
26	474178	4761	8617	4152	778563
27	472535	4756	8617	4152	776820
28	471254	4749	8616	4152	775394
29	470171	4747	8615	4152	774266
30	468490	4741	8615	4152	772465
31	466893	4725	8615	4150	770468
32	464795	4714	8615	4150	768150

Tabulka 7.1: Počty bojových prostředků Armády Spoených států amerických

Dny	Vojáci	Tanky	OT	Artillerie	Agr. Bojová síla
0	385955	747	2161	5130	616900
1	385955	747	2161	5130	616900
2	383764	734	2156	5124	614184
3	381341	730	2136	5083	609941
4	379326	717	2124	5056	606526
5	377333	696	2106	5037	603263
6	375348	685	2084	5013	599988
7	373264	664	2065	4983	596189
8	371218	659	2049	4967	593323
9	368750	635	2015	4932	588805
10	366065	613	1995	4838	581820
11	363527	585	1959	4779	576182
12	361023	571	1928	4745	571883
13	358479	558	1897	4722	568004
14	356358	551	1875	4691	564393
15	354676	544	1860	4672	561736
16	352832	523	1853	4646	558397
17	351282	518	1839	4629	555997
18	349494	509	1831	4593	552549
19	347770	503	1821	4579	550095
20	346018	501	1811	4544	546853
21	343964	489	1799	4516	543379
22	342255	487	1793	4494	540720
23	340309	485	1788	4471	537789
24	338444	477	1772	4445	534644
25	336768	477	1770	4422	532038
26	335334	470	1737	4401	529459
27	333638	468	1758	4368	526508
28	332102	466	1750	4336	523612
29	330935	466	1747	4323	521910
30	329356	453	1730	4303	519186
31	327852	448	1724	4284	516792
32	326427	445	1720	4270	514727

Tabulka 7.2: Počty bojových prostředků německé armády